数理解析研究所講究録
1512巻 2006年 37-43

多重ゼータ値の和とベルヌーイ数

大野泰生 (近畿大学 理工学部)
Yasuo Ohno (Kinki University)

Eulerの研究の中にも登場し、ここ10年余の間内外で盛んに研究されている多重ゼータ値について、リーマンゼータ関数の特殊値あるいはベルヌーイ数との関係で調べた結果を述べたい。多重ゼータ値が脚光を浴びた所以のひとつは、これらの値のなす $\mathbf{Q}$ 上の代数が、数学あるいは物理学の様々な場面で現れ重要であることにあり、様々な分野間のまだ十分に解明し尽くせていない相互関係を示唆していると思われることにある。

多重ゼータ値の定義には、等号なしのもの（MZV）と等号付きのもの（MZSV）があり、値は互いに他の線形結合で表示できるが、各重さにおけるベクトル空間の素性を細かく理解しようとするときには、どちらか一方だけに絞って取り扱うと、重要な性質が見落とされる傾向にあるように思う。MZVで記述すると美しい対称性が容易に把握されるのに、MZSVで記述するとかなり歪な様相しか見て取れない場合もあるし、逆にMZSVで解釈すると整然と纏まる性質が、MZVにおいては複雑な様相を呈することもある。

本稿では、等号付き多重ゼータ値（MZSV）のリーマンゼータ値との関係について近年得られた成果を、等号なしの多重ゼータ値（MZV）の場合の話を絡めながら述べてみようと思う。最後に重さ8のMZSVについて、ここで述べた関係式によってリーマンゼータ値の有理数倍と判明する和の取り方を図にしてみる。

1 MZV, MZSV と Sum Formula

この節では2種類の多重ゼータ値（MZVとMZSV）の定義の後、双方のSum Formulaを紹介したいと思う。

n個の正整数からなる多重インデックス $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ を考え、$k=k_1+k_2+\cdots+k_n$ を $\mathbf{k}$ のweight、n を $\mathbf{k}$ のdepth、$s=\#\{i|k_i\geq 2\}$ を $\mathbf{k}$ のheight とよぶ。$n\geq s\geq 1$ かつ $k\geq n+s$ をみたす整数 k,n,s に対して、これをweight, depth, height とする多重インデックスの全体を $I(k,n,s)$ と書く。また、特に $k_1>1$ を満たす多重インデックスをadmissibleとよび、これらのなす $I(k,n,s)$ の部分集合を $I_0(k,n,s)$ と書く。$I(k,n,s)$（$I_0(k,n,s)$）から height の条件を外した和集合を $I(k,n,*)$（$I_0(k,n,*)$）、depthの条件を外した和集合を $I(k,*,s)$（$I_0(k,*,s)$）で記す。

$\mathbf{k}\in I_0(k,n,s)$ に対して、多重ゼータ値 MZV:$\zeta(\mathbf{k})$ と、MZSV:$\zeta^*(\mathbf{k})$ を、

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n>0}\frac{1}{{m_1}^{k_1}{m_2}^{k_2}\cdots{m_n}^{k_n}},$$

$$\zeta^*(\mathbf{k}) = \zeta^*(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{{m_1}^{k_1} {m_2}^{k_2} \cdots {m_n}^{k_n}}$$

である。前者を multiple zeta value (MZV)、後者を multiple zeta-star value (MZSV) と呼んでいるが、これらの値は互いに他の $\mathbf{Q}$ 線形関係式で書ける。

1990 年代になって予想され証明された重要な成果のひとつに、多重ゼータ値の和公式がある。これは上で用意した記号を用いて次のように表示される。

定理 1.1 (Sum Formula [7][6][17]) 整数 $0 < n < k$ に対して以下が成り立つ。

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,n,*)} \zeta^*(\mathbf{k}) = \binom{k-1}{n-1} \zeta(k).$$

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,n,*)} \zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k).$$

これは例えば、

$$\zeta(2,1) = \zeta(3), \qquad \zeta^*(2,1) = 2\zeta(3),$$

$$\zeta(3,1) + \zeta(2,2) = \zeta(4), \qquad \zeta^*(3,1) + \zeta^*(2,2) = 3\zeta(4),$$

など、左辺の多重ゼータ値の和をリーマンゼータ値の有理数倍で書くという形の公式になっている。つまり weight と depth を固定した MZSV の和は全て、その weight のリーマンゼータ値の張る 1 次元部分空間に属しているのである。

2 巡回和について

$0 < n < k$ に対して、

$$I(k,n,*) = \{(k_1, k_2, \ldots, k_n) | k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k, \ k_i \geq 1\}$$

とし、$I(k,n,*)$ の 2 元 $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ が長さ n の巡回置換の冪でうつりあうとき、これらを巡回同値と呼び、$\mathbf{k} \sim \mathbf{k}'$ と書く。そして $I(k,n,*)$ の巡回同値類の全体を

$$\Pi(k,n) = I(k,n,*)/\sim$$

とする。このとき、以前の Hoffman 氏との共同研究で得られた MZV の巡回和公式は以下のように述べられる。

定理 2.1 (MZV の巡回和公式 [9]) $\Pi(k,n)$ $(0<n<k)$ の任意の元 α に対して次が成立する。

$$\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\alpha}\sum_{i=0}^{k_1-2}\zeta(k_1-i,k_2,k_3,\ldots,k_n,i+1)=\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\alpha}\zeta(k_1+1,k_2,k_3,\ldots,k_n)$$

これに対して、今回の若林徳子氏と筆者の共同研究で得られた MZSV の巡回和公式は以下のように述べられる。

定理 2.2 (MZSV の巡回和公式 [14]) $\Pi(k,n)$ $(0<n<k)$ の任意の元 α に対して次が成立する。

$$\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\alpha}\sum_{i=0}^{k_1-2}\zeta^\star(k_1-i,k_2,k_3,\ldots,k_n,i+1)=\frac{k\cdot\#\alpha}{n}\zeta(k+1).$$

MZV の巡回和公式と比較すると、右辺が著しく簡素なリーマンゼータ値の整数倍になっている。$I(k,n,*)$ に含まれる巡回同値類の個数は容易に特定できるため、この定理から容易に和公式を再証明できる。この定理自体の証明は、母関数の議論を使わず、部分分数の比較的初等的な計算からなる。すでに均整の取れた格好に見えていた和公式が実はこのように細分化できるものであったことになる。

3 MZSV の和の母関数について

本節では MZSV の和の母関数を構成し、その満たす微分方程式を解くことにより得られる、MZSV の和とリーマンゼータ値との関係式について述べる。

1990 年代後半に、Sum Formula の様々な証明が得られたが、その中で最も洗練されたもののひとつが、この和の母関数の満たす微分方程式を解くという手順をとっている。筆者は Zagier 氏との共同研究 ([15]) においてこの手法を拡張し、重さ・深さ・高さの 3 者を固定した MZV 和についてリーマンゼータ値との関係を示した。MZSV にこの手法を適用した場合、重さ・深さ・高さの 3 者を固定した和について現段階では完全には値を書ききるところまで行っておらず、いくつかの条件下での結果が得られている ([1],[2])。ここでは青木貴史氏と筆者の共同研究の結果を挙げる。

定理 3.1 ([2]) 整数 $s>0,\ k\geq 2s$ に対して以下が成り立つ。

$$\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,*,s)}\zeta^\star(\mathbf{k})=2\binom{k-1}{2s-1}(1-2^{1-k})\zeta(k).$$

先に述べたように、MZV の場合には上と類似の結果として、Zagier 氏との共同研究 ([15]) がある。MZV の場合には、重さ・深さ・高さの 3 者を固定した MZV 和がリーマン

ゼータ値の多項式として表記できるため、和の母関数のなす微分方程式は一般の場合にガウスの超幾何関数として解ける。しかしながら、MZSV におけるこの和は、リーマンゼータ値の多項式で張られる部分空間からはみ出ると予想されており、実際に計算は困難を極めるものとなる。青木氏と昆布康博氏との共同研究 ([1]) により上述の場合以外にもいくつかの特殊条件下では解決しており、リーマンゼータ値の多項式で書ける系列を与えている。

次に、インデックスが全て同じ数であった場合の MZSV、すなわち

$$\zeta^*(k,k,k,\dots,k)$$

の値について述べる。ここで用いるベルヌーイ数 B_n は、母関数 $\dfrac{te^t}{e^t-1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}$ で定義し、1 の原始 k 乗根を $\omega_k=e^{\frac{2\pi i}{k}}$ で表し、記号 $\binom{*}{*,*,\cdots,*}$ は多項係数を表すものとする。このとき、母関数を扱う計算により次の結果が得られる。

(1) 整数 $k>1$ に対して以下が成り立つ。

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^*(\underbrace{k,k,\dots,k}_{n})x^n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(kn)}{n}x^n\right).$$

(2) 正整数 $k,n>0$ に対して以下が成り立つ。

$$\zeta^*(\underbrace{2k,2k,\dots,2k}_{n}) = \sum_{\substack{a_1+2a_2+\cdots+na_n=n\\ a_j\geq 0}}\prod_{l=1}^{n}\left(\frac{|B_{2kl}|}{2l\{(2kl)!\}}\right)^{a_l}\frac{1}{a_l!}(2\pi)^{2kn}$$

(1),(2) いずれも母関数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^*(\underbrace{k,k,\dots,k}_{n})x^n$$

の満たす微分方程式を解くことにより導かれる。MZV の場合にも、$\zeta(k,k,k,\dots,k)$ の値について同様の手法による対応する結果が知られている。

また、$\sin x$ の無限積展開を用いることで次のような表記も得られる。

(3) 正整数 $k,n>0$ に対して以下が成り立つ。

$$\zeta^*(\underbrace{2k,2k,\dots,2k}_{n}) =$$

$$\sum_{\substack{\varepsilon_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}=kn\\ \forall\varepsilon_j\geq 0}}\binom{2kn}{2\varepsilon_0,2\varepsilon_1,\cdots,2\varepsilon_{k-1}}\left(\prod_{j=0}^{k-1}|2^{2\varepsilon_j}-2||B_{2\varepsilon_j}|\right)\omega_k^{\sum_{m=0}^{k-1}m\varepsilon_m}\frac{\pi^{2kn}}{(2kn)!}$$

リーマンゼータ値になる重さ８のMZSVの和

Sum Formula	Theorem2.2(O+Wakabayashi)	7x127ζ(8)/64	35x127ζ(8)/64	21x127ζ(8)/64	127ζ(8)/64 ← Theorem3.1 (Aoki+O)
ζ(8)=	ζ(8)=	[8]			
7ζ(8)=	7ζ(8)=	[7,1]	[6,2][5,3] [4,4] [3,5][2,6]		
21ζ(8)=	7ζ(8)=	[6,1,1]	[5,1,2][4,1,3][3,1,4][2,1,5]		
	7ζ(8)=		[5,2,1][2,5,1]	[4,2,2][3,2,3][2,2,4]	
	7ζ(8)=		[4,3,1][3,4,1]	[3,3,2][2,3,3][2,4,2]	
35ζ(8)=	7ζ(8)=	[5,1,1,1]	[4,1,1,2][3,1,1,3][2,1,14]		
	7ζ(8)=		[4,2,1,1][2,1,4,1]	[3,2,1,2][2,2,1,3]	
	7ζ(8)=		[4,1,2,1][2,4,1,1]	[3,1,2,2][2,1,2,3]	
	7ζ(8)=		[3,3,1,1][3,1,3,1]	[2,3,1,2][2,1,3,2]	
	7ζ(8)=			[3,2,2,1][2,3,2,1][2,2,3,1]	[2,2,2,2]
35ζ(8)=	7ζ(8)=	[4,1,1,1,1]	[3,1,1,1,2][2,1,1,1,3]		
	7ζ(8)=		[3,2,1,1,1][2,1,1,3,1]	[2,2,1,1,2]	
	7ζ(8)=		[3,1,2,1,1][2,1,3,1,1]	[2,1,2,1,2]	
	7ζ(8)=		[3,1,1,2,1][2,3,1,1,1]	[2,1,1,2,2]	
	7ζ(8)=			[2,2,2,1,1][2,2,1,2,1][2,1,2,2,1]	
21ζ(8)=	7ζ(8)=	[3,1,1,1,1,1]	[2,1,1,1,1,2]		
	7ζ(8)=		[2,2,1,1,1,1][2,1,1,1,2,1]		
	7ζ(8)=		[2,1,2,1,1,1][2,1,1,2,1,1]		
7ζ(8)=	7ζ(8)=	[2,1,1,1,1,1,1]			

記号：[k1,k2,…,kn]=ζ*(k1,k2,…,kn)

$\sin x$ の無限積展開を用いた (3) の結果については、九州大学の金子昌信氏によって $k=1$ の場合の計算がなされ、筆者もそれを参考にした。また、九州大学の宗田氏の修士論文 ([10]) においても (3) と同じ表記が独立に得られている。

最後に、上述の (2) と (3) を比較することによって、ベルヌーイ数について次の関係式が導かれる。

(4) 整数 $n>1$ に対して以下が成り立つ。

$$\frac{|B_{2n}|}{(2n)!\cdot 2n}=\frac{1}{2n(1-2^{1-2n})-1}\sum_{\substack{a_1+2a_2+\cdots+na_n=n\\ a_j\geq 0}}\prod_{l=1}^{n-1}\left(\frac{|B_{2l}|}{(2l)!\cdot 2l}\right)^{a_l}\frac{1}{a_l!}$$

参考文献

[1] T. Aoki, Y. Kombu and Y. Ohno, A generating function for sums of multiple zeta values and its applications, *preprint.*

[2] T. Aoki and Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric function, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Kyoto Univ., **41** (2005), 329-337.

[3] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 1-21.

[4] J. M. Borwein, D. M. Bradley and D. J. Broadhurst, Evaluations of k-fold Euler/Zagier sums: a compendium of results for arbitrary k, The Wilf Festschrift Volume. *Electron. J. Combin.*, **4** (1997), Research Paper 5, 19 pp.

[5] L. Euler, Meditationes circa singulare serierum genus, *Novi Comm. Acad. Sci. Ptropol*, **20** (1775), 140-186, reprinted in Opera Omnia ser. I, vil. 15, B. G. Teubner, Berlin (1927), 217-267.

[6] A. Granville, A decomposition of Riemann's zeta-function, in Analytic Number Theory (Y. Motohashi ed.), London Math. Soc. Lecture Note Ser. **247**, Cambridge, 1997, pp. 95-101.

[7] M. Hoffman, Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.*, **152** (1992), 275-290.

[8] M. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, *J. Algebra*, **194** (1997), 477-495.

[9] M. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *J. Algebra*, **262** (2003), 332-347.

[10] S. Muneta, On some explicit evaluations of multiple zeta-star values, 九州大学大学院数理学府 修士論文 (2006).

[11] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. Number Theory*, **74** (1999), 39-43.

[12] Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values, in Zeta Functions, Topology and Quantum Physics (T. Aoki, S. Kanemitsu, M. Nakahara and Y. Ohno eds.), *Developments in Math.*, **14**, Springer (2005), 131-144.

[13] Y. Ohno and J. Okuda, On sum formula for the q-analogue of multiple zeta-star values, *preprint.*

[14] Y. Ohno and N. Wakabayashi, Cyclic sum of multiple zeta values, to appear in *Acta Arithmetica.*

[15] Y. Ohno and D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, *Indag. Math.*, **12** (2001), 483-487.

[16] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in ECM volume, *Progress in Math.*, **120** (1994), 497-512.

[17] D. Zagier, Multiple zeta values, *unpublished manuscript*, 1995.